OE-Vorlesung 2022

Einführung in die Theorie der Petrinetze

Prof. Dr. Peter Kling

Wintersemester 2022/23

Universität Hamburg

Wer spricht denn da?

Peter Kling

- Büro: G-229
- E-Mail: peter.kling@uni-hamburg.de
- Leitung des ABs **T**heorie **E**ffizienter **A**lgorithmen

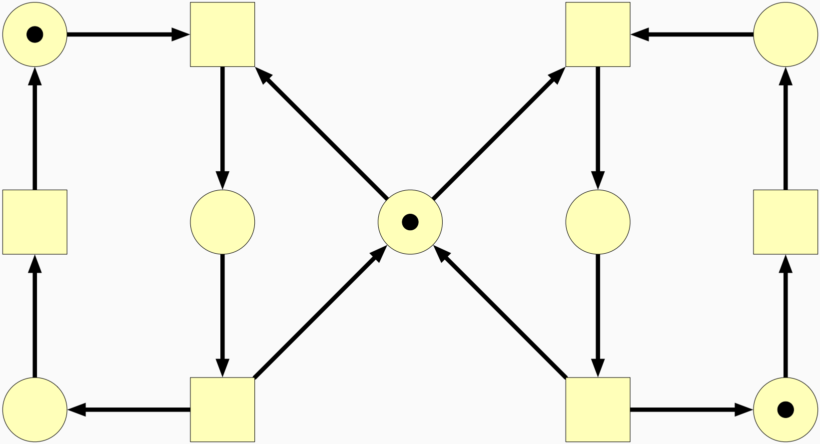
Sprechstunden

- Wann immer meine Bürotür offen steht oder…
- …nach Absprache per Email
- Während Pandemien: via UHH Zoom

Seid nicht schüchtern!

Stellt Fragen!

Petrinetze: Was soll das sein?



Übersicht

1) 🖥️ Informatik, Modellierung & Mathematik

Computer science is not about machines in the same way that astronomy is not about Telescopes. There is an essential unity of mathematics and computer science.

—*Michael Fellows, Professor @ Universität Bergen*

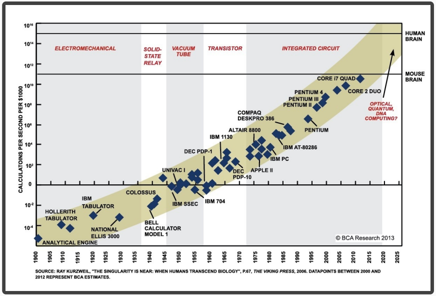
Technologischer Fortschritt = bessere Hardware?

Moore's Law

Wikipedia Link

Die Komplexität integrierter Schaltkreise verdoppelt sich etwa alle 2 Jahre.

oder ähnlich



Lösung von Optimierungsproblem

- 1988: 82 Jahre
- 2003: 1 Minute

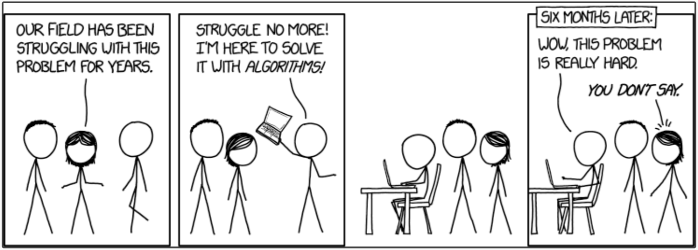
$\Longrightarrow$ Faktor $43 \cdot 10^6$

HW-Verbesserung: $\leq 10^3$

Rest

Algorithmen!

Gute Algorithmen finden: Wie schwer kann das schon sein?



click for more xkcd comics

Problem-Lösung

1) Verstehen des Problems
2) Formalisierung & Modellierung
3) Entwicklung eines Algorithmus
4) Beweis der Korrektheit & Effizienz

Informatiker

=

~~Programmierer~~

GPPS

General Purpose Problem Solver

Frage

Warum modellieren wir überhaupt?

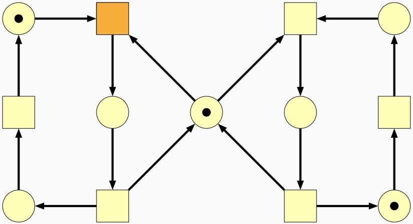
- Kommunikation
- Problemstellung konkretisieren
- auf das Wesentliche konzentrieren
- Vorgänge am Modell durchspielen & Thesen testen

Weiterführende Literatur

Stachowiak (1973): „*Allgemeine Modelltheorie.*“

2) 🧸 Graphische Einführung in Petrinetze

Petrinetze



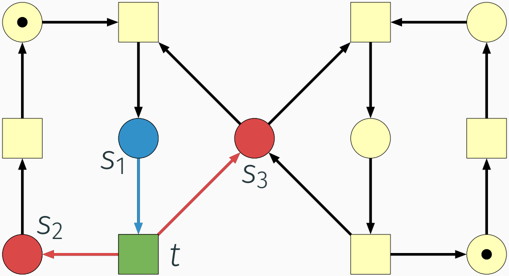
- eine (von vielen!) Modellierungstechnik
- gute graphische Visualisierung

  $\Longrightarrow$ Grundidee intuitiv verständlich
- können Nebenläufigkeiten & Parallelität abbilden
- mathematische Definition

  $\Longrightarrow$ präzise & exakt

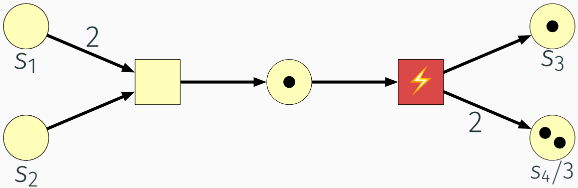
  $\Longrightarrow$ erlaubt formale (und ggfs. automatisierte) Überprüfung

Grundbegriffe



- Stellen: passive Komponenten
- Transitionen: aktive Komponenten
- Kanten: gerichtete Verbindung von Stellen und Transitionen
  - Eingangsstelle von Transition t: s_1
  - Ausgangsstelle von Transition t: s_2 und s_3
- Marken: „lokaler Zustand“ einer Stelle

Dynamik von Petrinetzen



Definition 1: Aktiviertheit

Eine Transition ist **aktiviert**, wenn

(a) alle Eingangsstellen ausreichend Marken beinhalten und
(b) die Kapazität jeder Ausgangsstellen ausreicht, um entsprechend viele zusätzliche Marken aufzunehmen.

Definition 2: Schalten

Ist eine Transition aktiviert, so *kann* sie **schalten**. Dabei

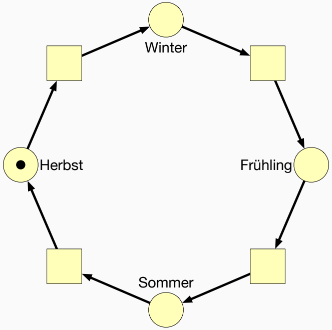
(a) werden von allen Eingangsstellen Marken entfernt und
(b) zu allen Ausgangsstellen Marken gelegt.

Dies geschieht entsprechend der Kantengewichtung.

Nicht-determi-nismus

Beispiel: Modell der vier Jahreszeiten

- eine Stelle pro Jahreszeit
- Position der Marke beschreibt aktuelle Jahreszeit
- sich ändernde Jahreszeiten
  - $\rightsquigarrow$ dynamisches System
  - $\rightsquigarrow$ modelliert durch Transitionen



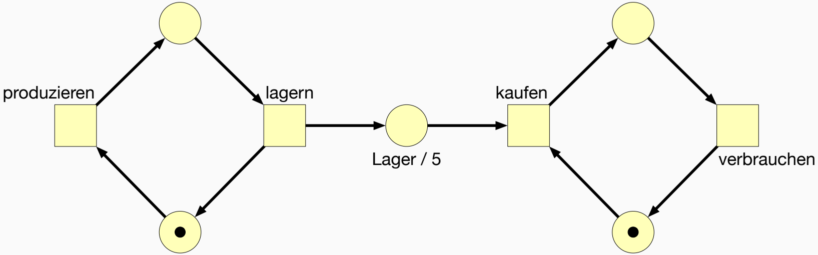
Eigenschaften dieses Systems

- genau eine Marke (Invariante)
- Netz stellt Kausalitäten dar
- Transitionen schalten sequentiell

Nicht alle Systeme haben diese Eigenschaften!

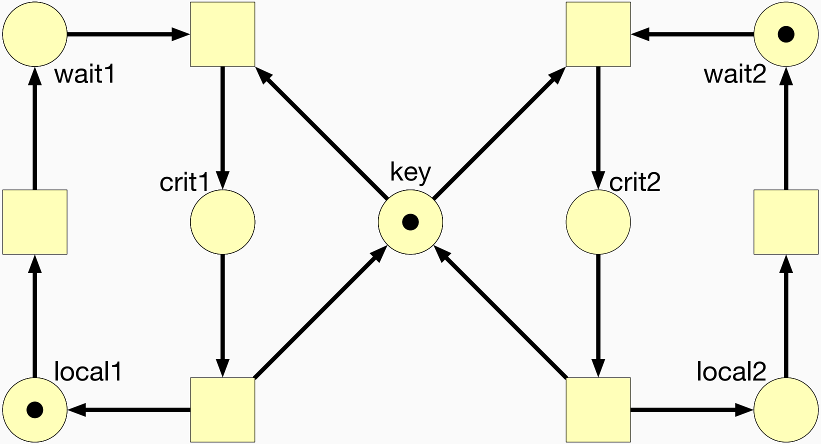
Beispiel: Producer-Consumer

- Prozess 1: produziert eine Ressource
- Prozess 2: konsumiert eine Ressource



Zu Modellieren

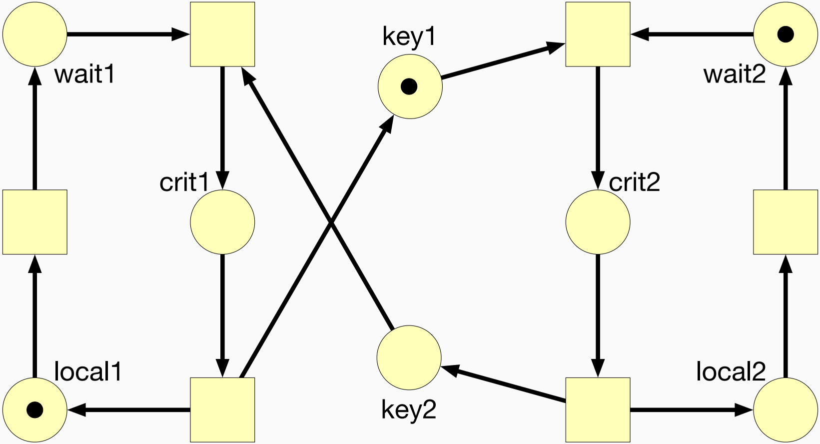
Zwei Prozesse, die in einem kritischen Bereich eine gemeinsame Ressource alleine nutzen wollen.



Beispiel: Kritischer Bereich

Zu Modellieren

Zwei Prozesse, die in einem kritischen Bereich eine gemeinsame Ressource alleine nutzen wollen.



3) 🎓 Formale Einführung in Petrinetze

- **Menge:** Ansammlung von Elementen
  - z. B. $M_1 = \{1, 2, 3\}$ und $M_2 = \{2, \pentagon\}$
- **Enthaltensein:** Gehört eine Element zu einer Menge?
  - z. B. $1 \in M_1$ aber $1 \notin M_2$
- **Teilmenge:** Menge ist Teil einer anderen Menge
  - z. B. $\{1, 2\} \subseteq M_1$
  - aber $M_1 \not\subseteq M_2$ und $M_2 \not\subseteq M_1$
- **Vereinigung:** Zusammenwerfen zweier Mengen
  - z. .B. $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, \pentagon\}$
- **Schnitt:** gemeinsame Elemente
  - z. B. $M_1 \cap M_2 = \{2\}$
- **Kartesisches Produkt:** alle möglichen Pärchen
  - z. B. $M_1 \times M_2 = \{(1, 2), (1, \pentagon), (2, 2), (2, \pentagon), (3, 2), (3, \pentagon)\}$

Definition 3: Abbildung

Eine **Abbildung**, notiert als

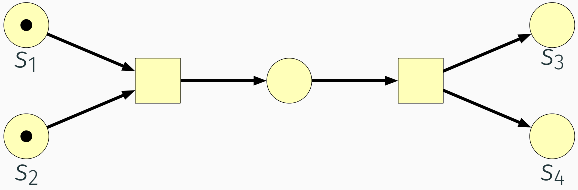
$$f : A \to B,$$

bildet jedes Element $a \in A$ auf ein Element $f(a) \in B$ ab.

Beispiele

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$.
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $x \mapsto |x|$.
- $h : \{\pentagon, \circ\} \to \{1, 2\}$ mit $h(\pentagon) = h(\circ) = 1$.

Formale Definition von Petri-Netzen

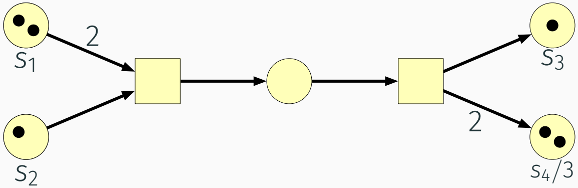


Definition 4: P/T-Netz

Ein **P/T-Netz** ist ein Tupel $N = (P, T, F, W, m_0)$ mit:

- einer endlichen Menge P von **Plätzen** (Stellen),
- einer endlichen Menge T von **Transitionen** mit $P \cap T = \emptyset$,
- einer **Flussrelation** $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,
- einer **Kantenbewertung** $W\colon (P \times T) \cup (T \times P) \to \mathbb{N}$
  mit $W(x, y) = 0 \iff (x, y) \notin F$
- und einer **Anfangsmarkierung** $m_0\colon P \to \mathbb{N}$.

Erweiterung der Definition für Kapazitäten



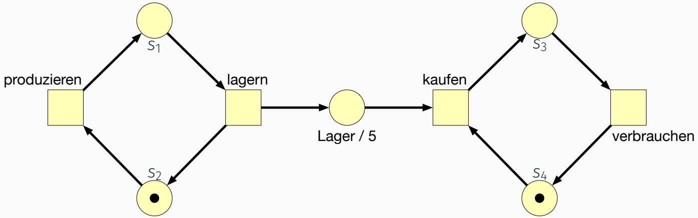
Definition 5: P/T-Netz mit Kapazitäten

Ein **P/T-Netz mit Kapazitäten** ist ein Tupel $N = (P, T, F, W, K, m_0)$ mit:

- einem *P/T-Netz* $N' = (P, T, F, W, m_0)$,
- einer **Kapazitätsfunktion** $K\colon P \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- und $m_0(p) \leq K(p)$ für alle $p \in P$.

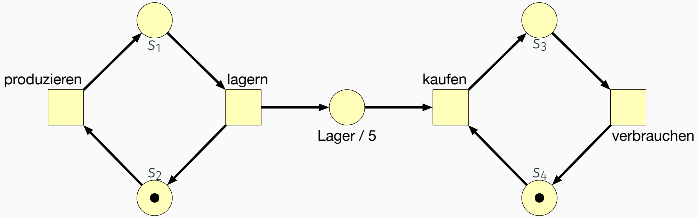
auch ω statt ∞

Beispiel zur formalen Definition



- $P = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, \text{Lager} \}$
- $T = \{ \text{lagern}, \text{produzieren}, \text{kaufen}, \text{verbrauchen} \}$
- $F = \{(\text{produzieren}, s_1), (s_1, \text{lagern}), (\text{lagern}, s_2), (s_2, \text{produzieren}),$
  $(\text{lagern}, \text{Lager}), (\text{Lager}, \text{kaufen}),$
  $(\text{kaufen}, s_3), (s_3, \text{verbrauchen}), (\text{verbrauchen}, s_4), (s_4, \text{kaufen})\}$

Beispiel zur formalen Definition



- W ist gegeben durch:

  $W(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in F$ und $W(x, y) = 0$ sonst

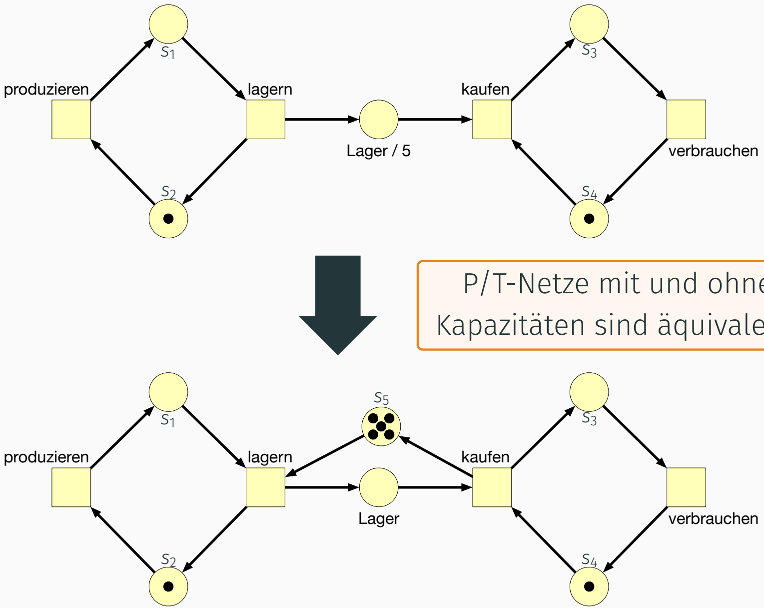
- m_0 ist gegeben durch:

  $m_0(s_2) = m_0(s_4) = 1$ und $m_0(s_1) = m_0(s_3) = m_0(\text{Lager}) = 0$

- K ist gegeben durch:

  $K(\text{Lager}) = 5$ und $K(s_1) = K(s_2) = K(s_3) = K(s_4) = \infty$

Modellierungsmächtigkeit: Sind Kapazitäten wirklich notwendig?



P/T-Netze mit und ohne Kapazitäten sind äquivalent!

Gegeben:

- ein P/T-Netz (mit Kapazitäten) $N = (P, T, F, W, K, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- eine Markierung m_1.

Definition 6: Aktivierung

Die Transition t ist **aktiviert** in m_1, falls für alle $p \in P$ folgendes gilt:

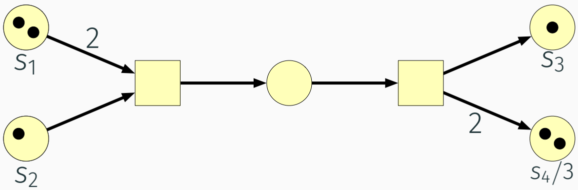
(a) $m_1(p) \geq W(p,t)$ und

(b) $m_1(p) - W(p,t) + W(t,p) \leq K(p)$.

Wir schreiben $m_1 \xrightarrow{t}$.

P/T-Netz ohne Kapazitäten: nur erste Bedingung.

Formalisierung: Dynamik von P/T-Netzen (2/3)



Definition 7: Schalten

Sei $N = (P, T, F, W, K, m_0)$ ein P/T-Netz, $t \in T$ eine Transition und m_1, m_2 Markierungen. Die Transition t **schaltet** m_1 zu m_2, falls

(a) t in m_1 aktiviert ist und

(b) $\forall p \in P\colon\ m_2(p) = m_1(p) - W(p,t) + W(t,p)$ gilt.

Wir schreiben $m_1 \xrightarrow{t} m_2$ und nennen m_2 **Folgemarkierung** von m_1.

Eine Schaltfolge ist ein endliches Wort

$$w = t_1 t_2 t_3 \ldots t_n$$

mit $t_i \in T$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Definition 8: Schalten einer Schaltfolge

Eine **Schaltfolge** w **schaltet** m zu m', falls

(a) entweder $w = \lambda$ (leeres Wort mit $n = 0$) und $m = m'$

(b) oder $w = (u \cdot t)$ für $u \in T^*$ und $t \in T$, so dass $m \xrightarrow{u} m_1$ und $m_1 \xrightarrow{t} m'$ für eine Markierung m_1 gilt.

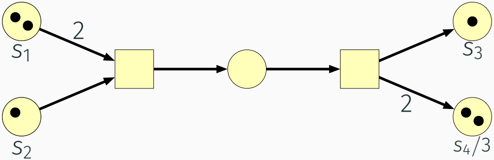
Wir schreiben $m \xrightarrow{w} m'$ oder $m \xrightarrow{*} m'$ (falls konkretes w unwichtig).

4) 🍇 Reaping the Fruits!

Eigenschaften von Markierungen & Transitionen

Definition 9

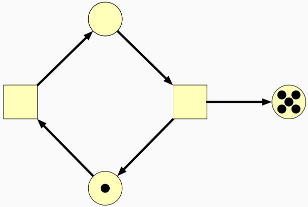
- m ist erreichbar, wenn es eine Schaltfolge w gibt mit $m_0 \xrightarrow{w} m$. Die Menge aller erreichbaren Markierungen eines Netzes N wird mit $R(N)$ bezeichnet.
- $t \in T$ ist aktivierbar, wenn es eine erreichbare Markierung m gibt mit $m \xrightarrow{t}$.
- $t \in T$ ist tot, wenn t nicht (mehr) aktivierbar ist.
- $t \in T$ ist lebendig, wenn t immer aktivierbar ist. D. h. $\forall$ erreichbare Markierung m $\exists$ Schaltfolge w mit $m \xrightarrow{wt}$.



Eigenschaften von Netzen

Definition 10

- Ein Netz ist lebendig, wenn alle Transitionen lebendig sind.
- Ein Netz ist beschränkt, wenn zu jedem Platz $p \in P$ eine natürliche Zahl n_p existiert, so dass in jeder erreichbaren Markierung nie mehr als n_p Marken auf p liegen.
  - Ein Netz ist k-beschränkt oder k-*sicher*, wenn $\forall p \in P\colon n_p = k$.
- Ein Netz ist rücksetzbar, wenn m_0 aus jeder erreichbaren Markierung heraus wieder erreichbar ist.



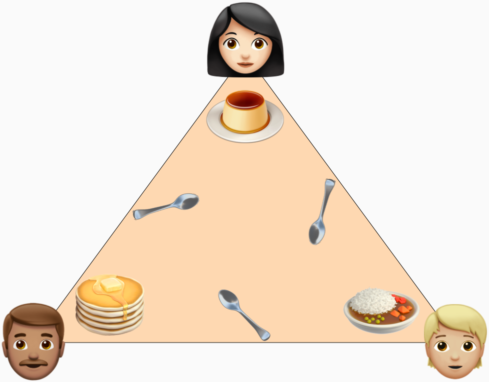
Übung

Sind diese Begriffe orthogonal?

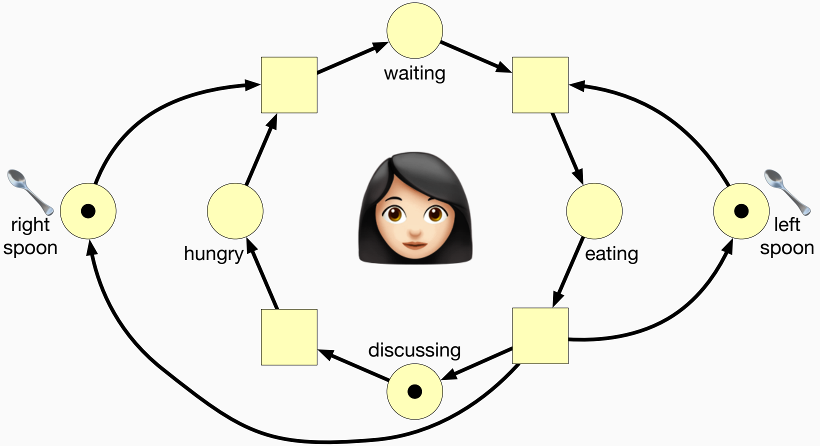
5) 🍽️ Let’s go Dining!

Szenario: Dining Philosophers

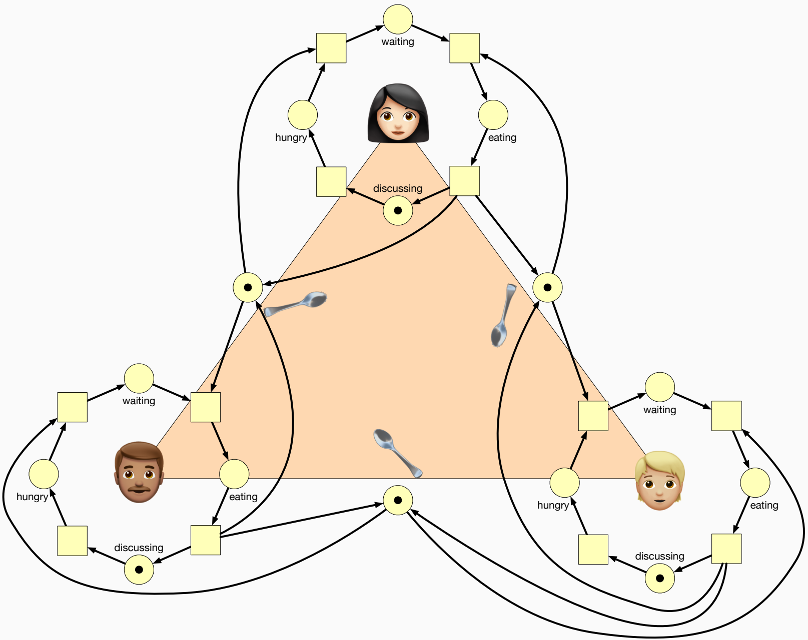
- es sitzen drei Philosoph*inn*en an einem Tisch
- zwischen je zwei Sitzplätzen liegt ein Löffel
- die drei Diskutierenden werden von Zeit zu Zeit hungrig
- zum Essen benötigt eine Person zwei Löffel
  - müssen nacheinander genommen werden
- nach dem Essen werden beide Löffel zurück gelegt

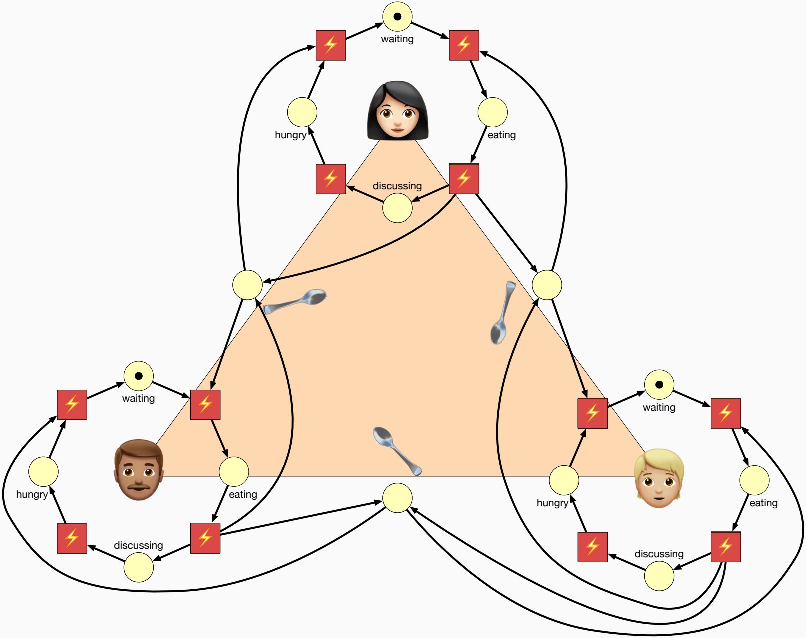


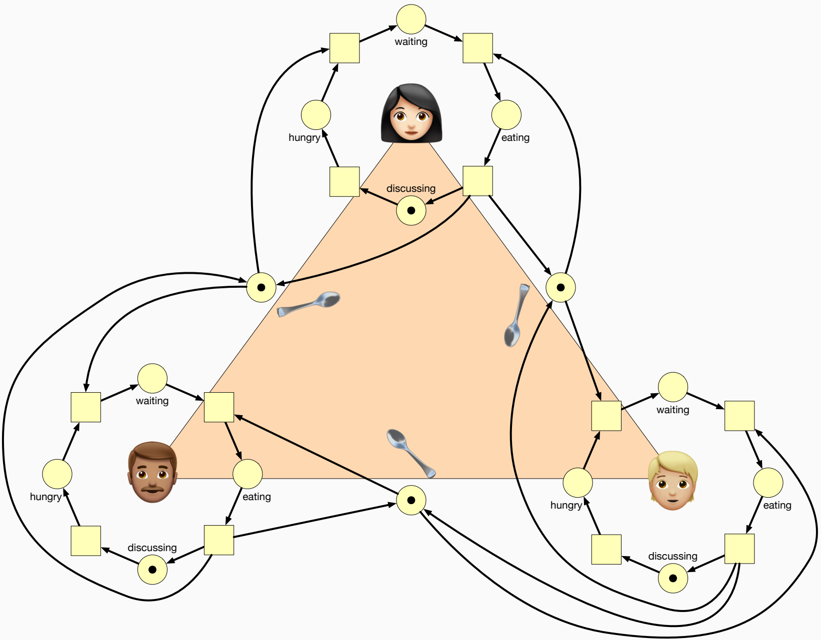
Wie modelliert man eine Philosophin?



Und wie sieht nun das ganze Szenario aus?


waiting
hungry
eating
discussing
waiting
hungry
eating
discussing
waiting
hungry
eating
discussing


waiting
hungry
eating
discussing
waiting
hungry
eating
discussing
waiting
hungry
eating
discussing


waiting
hungry
eating
discussing
waiting
hungry
eating
discussing
waiting
hungry
eating
discussing

6) 📜 Zusammenfassung & 🔭 Ausblick

Computer science is not about machines in the same way that astronomy is not about Telescopes. There is an essential unity of mathematics and computer science.

—Michael Fellows, Professor @ Universität Bergen

Petrinetze

- eine Modellierungstechnik
- Visualisierung + mathematische Formalisierung
- erlaubt präzise Formulierung von Eigenschaften…
- …und deren mathematischer Nachweis

von vielen!

oder Widerlegung!

Mehr zu Petrinetzen

- z. B. in Reisig (2010): „*Petrinetze Modellierungstechnik, Analysemethoden, Fallstudien*“
- am FB entwickeltes Werkzeug: Renew

Takeaway

Informatiker $\neq$ Programmierer, HW-Designer, PC-Doktor, Word-Experte, …

Informatiker $=$ **Problemlösekünstler!**

🔭 Ausblick

Wir sehen uns wieder... 👀

- in einem Jahr zu Algorithmen & Datenstrukturen,
- vielleicht im Master zu Methoden des Algorithmenentwurfes
- oder zu Abschlussarbeiten und anderen Veranstaltungen!

💡 Zum Schluss ein paar Tipps

- seid engagiert und aktiv
- ein Studium ist ein Vollzeitjob

  $\Longrightarrow$ Behandelt es so!
- „It's dangerous to go alone!“

  $\Longrightarrow$ Findet Lerngruppen!

Aber vor allem:

Habt Spaß!

Literatur

[1] Wolfgang Reisig. *Petrinetze Modellierungstechnik, Analysemethoden, Fallstudien*. 1. Aufl. Wiesbaden, 2010. ISBN: 9783834812902, 3834812900. URL: https://www.worldcat.org/oclc/660151425 (besucht am 11. 10. 2022).

[2] Herbert Stachowiak. *Allgemeine Modelltheorie*. Wien, New York, Springer-Verlag, 1973. ISBN: 0387811060, 9780387811062, 3211811060, 9783211811061. URL: https://www.worldcat.org/oclc/884098 (besucht am 11. 10. 2022).