

OE-Vorlesung 2023

Einführung in die Theorie der Petrinetze

Prof. Dr. Peter Kling

Wintersemester 2023/24

Universität Hamburg

Wer spricht denn da?

Peter Kling

- Büro: G-229
- E-Mail: peter.kling@uni-hamburg.de
- Leitung des ABs Theorie Effizienter Algorithmen

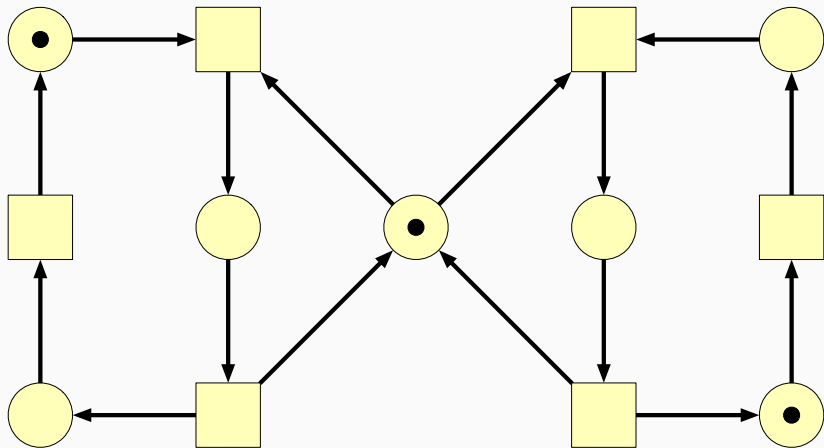


Sprechstunden

- Wann immer meine Bürotür offen steht oder...
- ...nach Absprache per Email

Seid nicht schüchtern!
Stellt Fragen!

Petrinetze: Was soll das sein?



Übersicht

- 1 🖥️ Informatik, Modellierung & Mathematik
- 2 🧸 Graphische Einführung in Petrinetze
- 3 🎓 Formale Einführung in Petrinetze
- 4 🍇 Reaping the Fruits!
- 5 🍴 Let's go Dining!
- 6 📖 Zusammenfassung & 🔭 Ausblick



1) Informatik, Modellierung & Mathematik

Computer science is *not about machines* in the same way that astronomy is not about Telescopes. There is an *essential unity* of *mathematics* and *computer science*.

—*Michael Fellows*, Professor @ Universität Bergen



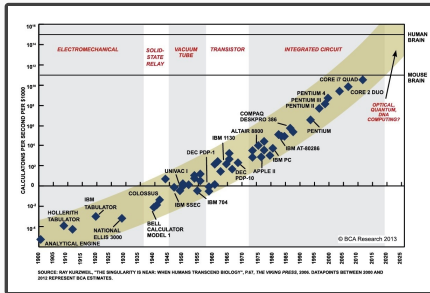
Technologischer Fortschritt = bessere Hardware?

Moore's Law

[Wikipedia Link](#)

Die Komplexität integrierter Schaltkreise verdoppelt sich etwa alle 2 Jahre.

oder
ähnlich



Lösung von Optimierungsproblem

- 1988: 82 Jahre
- 2003: 1 Minute

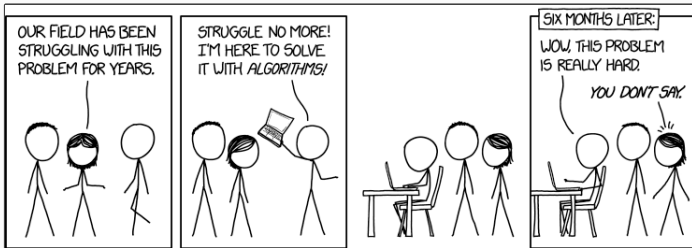
⇒ Faktor $43 \cdot 10^6$

HW-Verbesserung: $\leq 10^3$

Rest

Algorithmen!

Gute Algorithmen finden: Wie schwer kann das schon sein?



[click for more xkcd comics](#)

Problem-Lösung

- 1) Verstehen des Problems
- 2) **Formalisierung & Modellierung**
- 3) Entwicklung eines Algorithmus
- 4) Beweis der Korrektheit & Effizienz

Informatiker

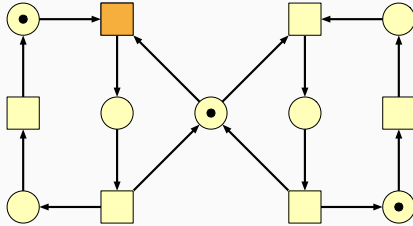
=

~~Programmierer~~

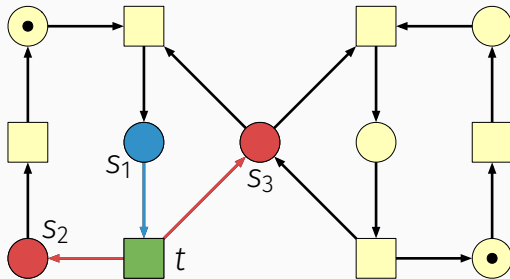
GPSS

General Purpose Problem Solver

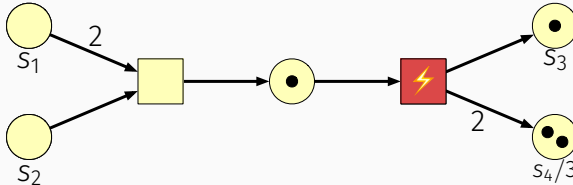
2) 🧸 Graphische Einführung in Petrinetze



- eine (von vielen!) Modellierungstechnik
- gute graphische Visualisierung
 - ⇒ Grundidee intuitiv verständlich
- können Nebenläufigkeiten & Parallelität abbilden
- mathematische Definition
 - ⇒ präzise & exakt
 - ⇒ erlaubt formale (und ggfs. automatisierte) Überprüfung



- Stellen: passive Komponenten
- Transitionen: aktive Komponenten
- Kanten: gerichtete Verbindung von Stellen und Transitionen
 - Eingangsstelle von Transition t : S_1
 - Ausgangsstelle von Transition t : S_2 und S_3
- Marken: „lokaler Zustand“ einer Stelle



Definition 1: Aktiviertheit

Eine Transition ist **aktiviert**, wenn

- (a) alle Eingangsstellen ausreichend Marken beinhalten und
- (b) die Kapazität jeder Ausgangsstellen ausreicht, um entsprechend viele zusätzliche Marken aufzunehmen.

Definition 2: Schalten

Ist eine Transition aktiviert, so **kann** sie **schalten**. Dabei

- (a) werden von allen Eingangsstellen Marken entfernt und
- (b) zu allen Ausgangsstellen Marken gelegt.

Dies geschieht entsprechend der Kantengewichtung.

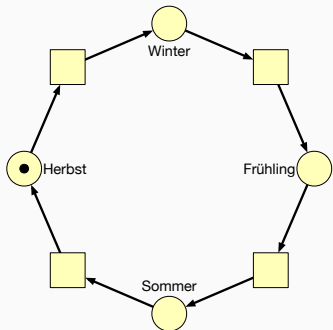
Nicht-
determi-
nismus

Beispiel: Modell der vier Jahreszeiten

- eine Stelle pro Jahreszeit
- Position der Marke beschreibt aktuelle Jahreszeit
- sich ändernde Jahreszeiten
 - ~ dynamisches System
 - ~ modelliert durch Transitionen

Eigenschaften dieses Systems

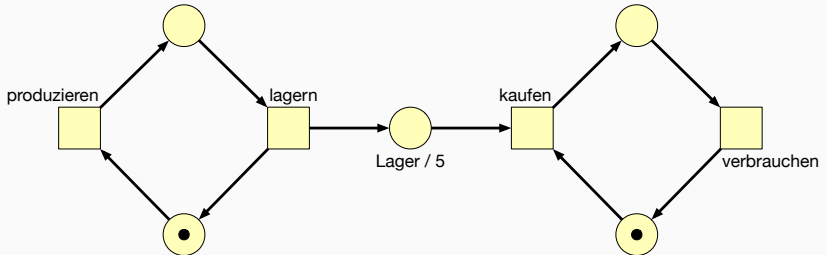
- genau eine Marke (**Invariante**)
- Netz stellt **Kausalitäten** dar
- Transitionen schalten **sequentiell**



Nicht alle Systeme haben diese Eigenschaften!

Beispiel: Producer-Consumer

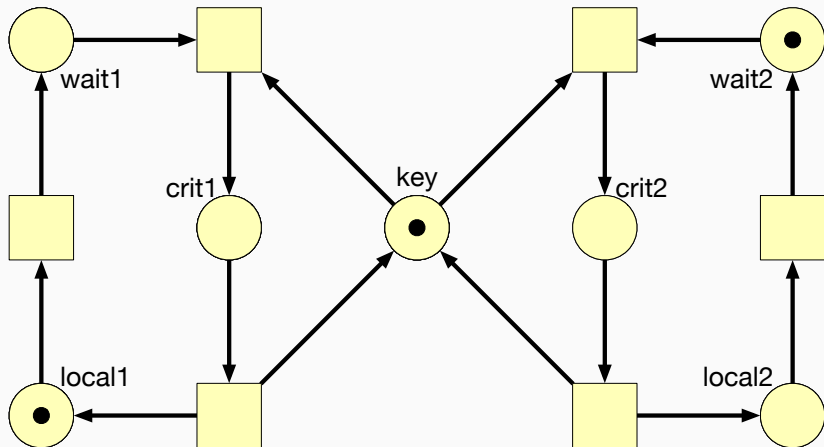
- Prozess 1: produziert eine Ressource
- Prozess 2: konsumiert eine Ressource



Beispiel: Kritischer Bereich

Zu Modellieren

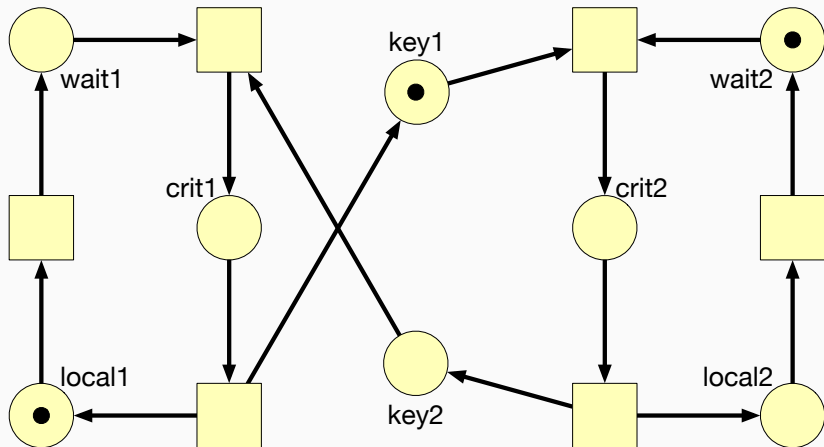
Zwei Prozesse, die in einem **kritischen Bereich** eine **gemeinsame Ressource** alleine nutzen wollen.



Beispiel: Kritischer Bereich

Zu Modellieren

Zwei Prozesse, die in einem **kritischen Bereich** eine **gemeinsame Ressource** alleine nutzen wollen.



3) Formale Einführung in Petrinetze

- **Menge**: Ansammlung von Elementen
 - z. B. $M_1 = \{1, 2, 3\}$ und $M_2 = \{2, \diamond\}$
- **Enthaltensein**: Gehört ein Element zu einer Menge?
 - z. B. $1 \in M_1$ aber $1 \notin M_2$
- **Teilmenge**: Menge ist Teil einer anderen Menge
 - z. B. $\{1, 2\} \subseteq M_1$
 - aber $M_1 \not\subseteq M_2$ und $M_2 \not\subseteq M_1$
- **Vereinigung**: Zusammenwerfen zweier Mengen
 - z. B. $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, \diamond\}$
- **Schnitt**: gemeinsame Elemente
 - z. B. $M_1 \cap M_2 = \{2\}$
- **Kartesisches Produkt**: alle möglichen Pärchen
 - z. B. $M_1 \times M_2 = \{(1, 2), (1, \diamond), (2, 2), (2, \diamond), (3, 2), (3, \diamond)\}$

Definition 3: Abbildung

Eine **Abbildung**, notiert als

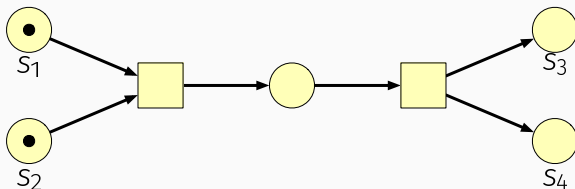
$$f: A \rightarrow B,$$

bildet jedes Element $a \in A$ auf ein Element $f(a) \in B$ ab.

Beispiele

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$.
- $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $x \mapsto |x|$.
- $h: \{\diamond, \circ\} \rightarrow \{1, 2\}$ mit $h(\diamond) = h(\circ) = 1$.

Formale Definition von Petri-Netzen

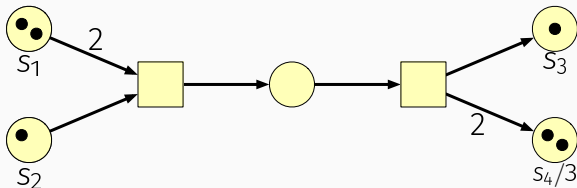


Definition 4: P/T-Netz

Ein **P/T-Netz** ist ein Tupel $N = (P, T, F, W, m_0)$ mit:

- einer endlichen Menge P von **Plätzen** (Stellen),
- einer endlichen Menge T von **Transitionen** mit $P \cap T = \emptyset$,
- einer **Flussrelation** $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,
- einer **Kantenbewertung** $W: (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \mathbb{N}$
mit $W(x, y) = 0 \iff (x, y) \notin F$
- und einer **Anfangsmarkierung** $m_0: P \rightarrow \mathbb{N}$.

Erweiterung der Definition für Kapazitäten



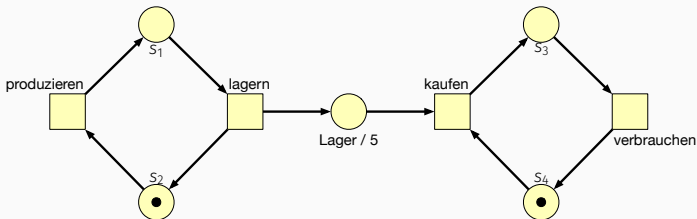
Definition 5: P/T-Netz mit Kapazitäten

Ein **P/T-Netz mit Kapazitäten** ist ein Tupel $N = (P, T, F, W, K, m_0)$ mit:

- einem P/T-Netz $N' = (P, T, F, W, m_0)$,
- einer **Kapazitätsfunktion** $K: P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- und $m_0(p) \leq K(p)$ für alle $p \in P$.

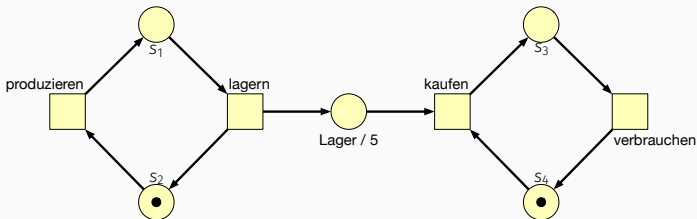
auch ω
statt ∞

Beispiel zur formalen Definition



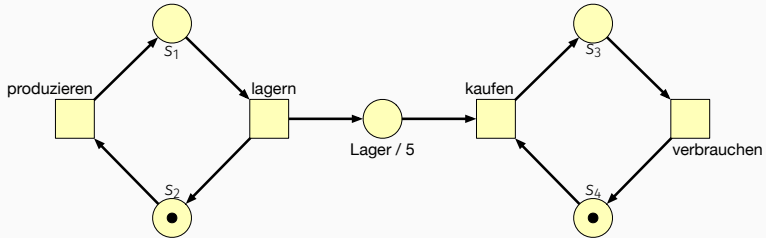
- $P = \{ S_1, S_2, S_3, S_4, \text{Lager} \}$
- $T = \{ \text{lagern}, \text{produzieren}, \text{kaufen}, \text{verbrauchen} \}$
- $F = \{ (\text{produzieren}, S_1), (S_1, \text{lagern}), (\text{lagern}, S_2), (S_2, \text{produzieren}), (\text{lagern}, \text{Lager}), (\text{Lager}, \text{kaufen}), (\text{kaufen}, S_3), (S_3, \text{verbrauchen}), (\text{verbrauchen}, S_4), (S_4, \text{kaufen}) \}$

Beispiel zur formalen Definition

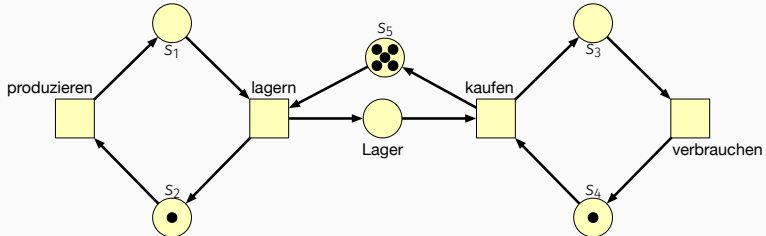


- W ist gegeben durch:
 $W(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in F$ und $W(x, y) = 0$ sonst
- m_0 ist gegeben durch:
 $m_0(s_2) = m_0(s_4) = 1$ und $m_0(s_1) = m_0(s_3) = m_0(\text{Lager}) = 0$
- K ist gegeben durch:
 $K(\text{Lager}) = 5$ und $K(s_1) = K(s_2) = K(s_3) = K(s_4) = \infty$

Modellierungsmächtigkeit: Sind Kapazitäten wirklich notwendig?



P/T-Netze mit und ohne Kapazitäten sind äquivalent!



Gegeben:

- ein P/T-Netz (mit Kapazitäten) $N = (P, T, F, W, K, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- eine Markierung m_1 .

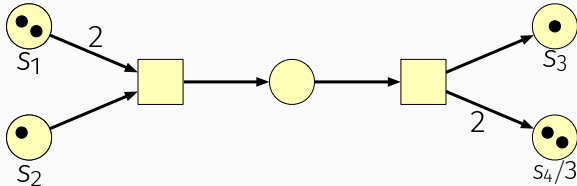
Definition 6: Aktivierung

Die Transition t ist **aktiviert** in m_1 , falls für alle $p \in P$ folgendes gilt:

- (a) $m_1(p) \geq W(p, t)$ und
- (b) $m_1(p) - W(p, t) + W(t, p) \leq K(p)$.

Wir schreiben $m_1 \xrightarrow{t}$.

P/T-Netz **ohne** Kapazitäten: nur erste Bedingung.



Definition 7: Schalten

Sei $N = (P, T, F, W, K, m_0)$ ein P/T-Netz, $t \in T$ eine Transition und m_1, m_2 Markierungen. Die Transition t **schaltet** m_1 zu m_2 , falls

- (a) t in m_1 aktiviert ist und
- (b) $\forall p \in P: m_2(p) = m_1(p) - W(p, t) + W(t, p)$ gilt.

Wir schreiben $m_1 \xrightarrow{t} m_2$ und nennen m_2 **Folgemarkierung** von m_1 .

Eine **Schaltfolge** ist ein endliches Wort

$$w = t_1 t_2 t_3 \dots t_n$$

mit $t_i \in T$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Definition 8: Schalten einer Schaltfolge

Eine **Schaltfolge** w **schaltet** m zu m' , falls

- (a) entweder $w = \lambda$ (leeres Wort mit $n = 0$) und $m = m'$
- (b) oder $w = (u \cdot t)$ für $u \in T^*$ und $t \in T$, so dass $m \xrightarrow{u} m_1$ und $m_1 \xrightarrow{t} m'$ für eine Markierung m_1 gilt.

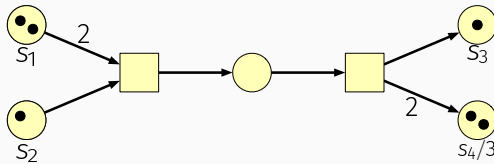
Wir schreiben $m \xrightarrow{w} m'$ oder $m \xrightarrow{*} m'$ (falls konkretes w unwichtig).

4) 🍇 Reaping the Fruits!



Definition 9

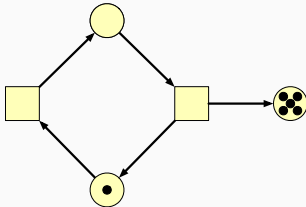
- m ist **erreichbar**, wenn es eine Schaltfolge w gibt mit $m_0 \xrightarrow{w} m$. Die Menge aller erreichbaren Markierungen eines Netzes N wird mit $R(N)$ bezeichnet.
- $t \in T$ ist **aktivierbar**, wenn es eine erreichbare Markierung m gibt mit $m \xrightarrow{t}$.
- $t \in T$ ist **tot**, wenn t nicht (mehr) aktivierbar ist.
- $t \in T$ ist **lebendig**, wenn t immer aktivierbar ist. D. h. $\forall$ erreichbare Markierung $m \exists$ Schaltfolge w mit $m \xrightarrow{wt}$.





Definition 10

- Ein Netz ist **lebendig**, wenn alle Transitionen lebendig sind.
- Ein Netz ist **beschränkt**, wenn zu jedem Platz $p \in P$ eine natürliche Zahl n_p existiert, so dass in jeder erreichbaren Markierung nie mehr als n_p Marken auf p liegen.
 - Ein Netz ist **k -beschränkt** oder **k -sicher**, wenn $\forall p \in P: n_p = k$.
- Ein Netz ist **rücksetzbar**, wenn m_0 aus jeder erreichbaren Markierung heraus wieder erreichbar ist.



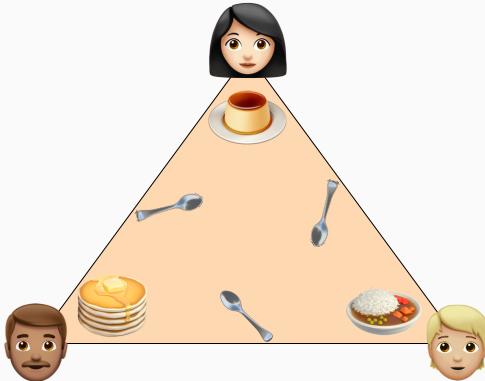
Übung

Sind diese Begriffe orthogonal?

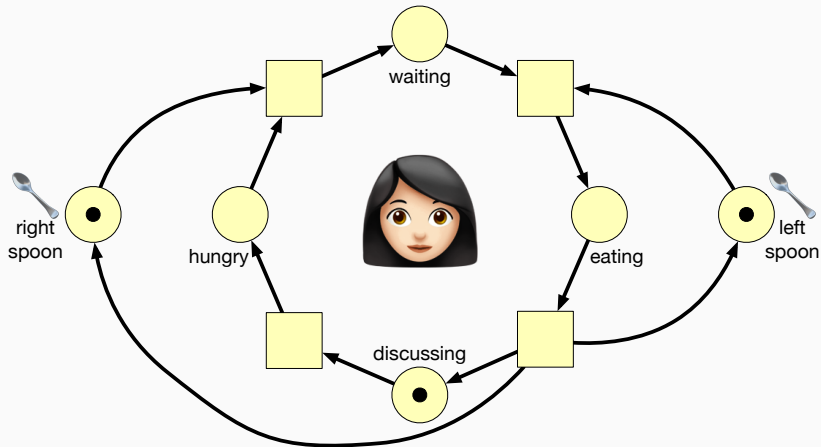
5) 🍴 Let's go Dining!

Szenario: Dining Philosophers

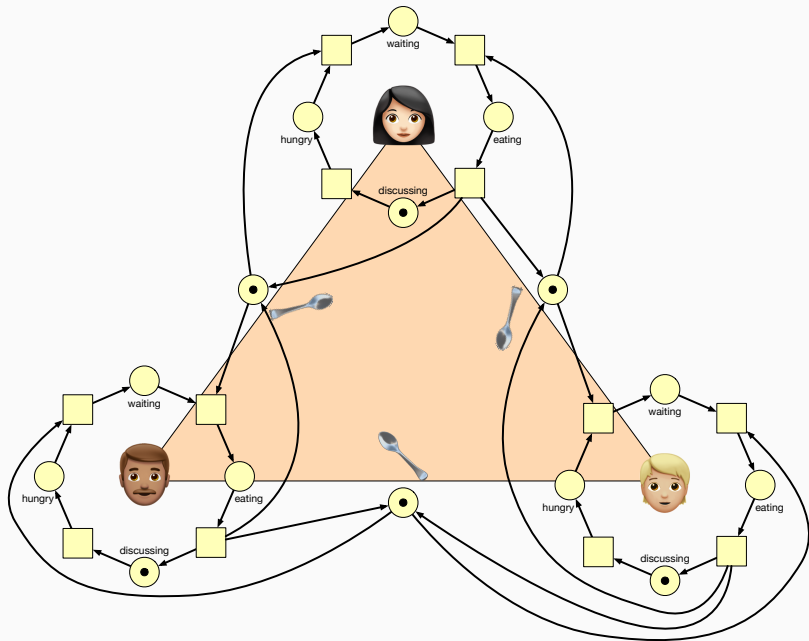
- es sitzen drei Philosoph*inn*en an einem Tisch
- zwischen je zwei Sitzplätzen liegt ein Löffel
- die drei Diskutierenden werden von Zeit zu Zeit hungrig
- zum Essen benötigt eine Person zwei Löffel
 - müssen **nacheinander** genommen werden
- nach dem Essen werden beide Löffel zurück gelegt

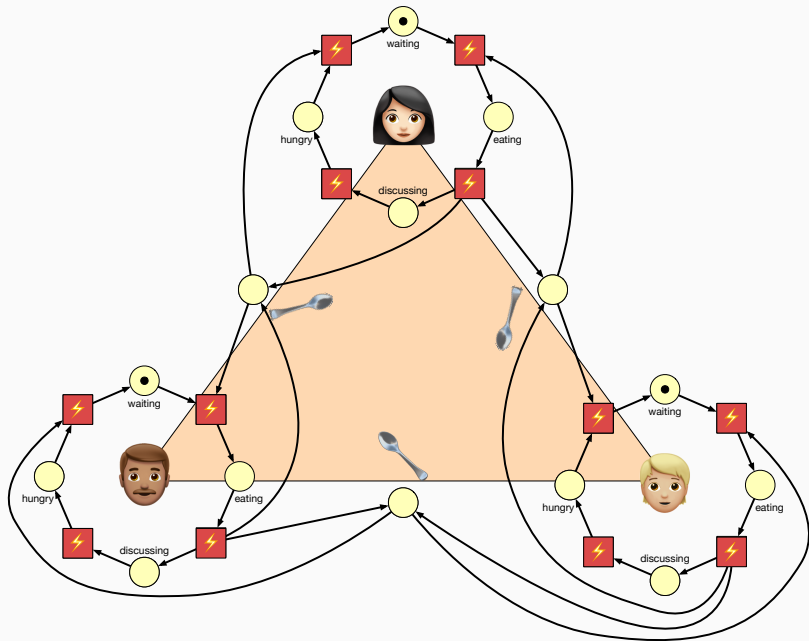


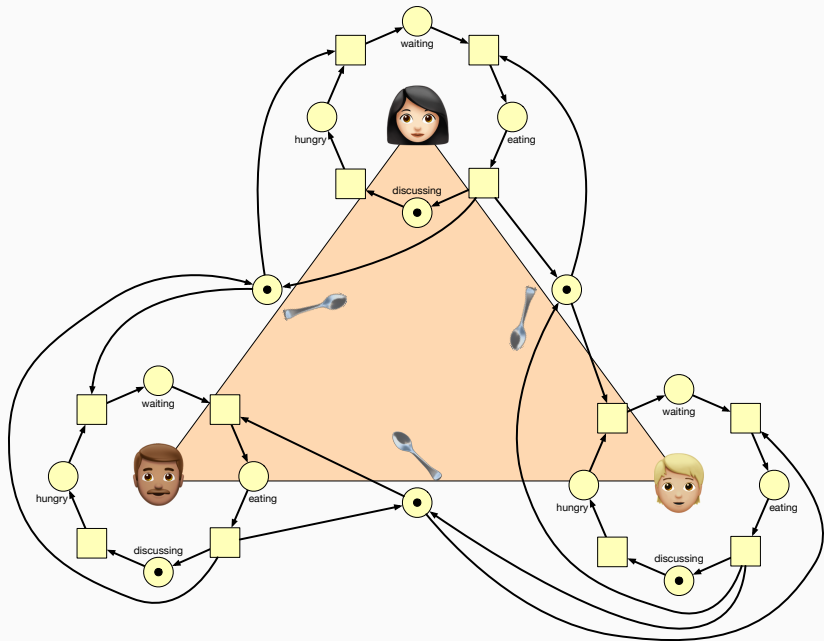
Wie modelliert man eine Philosophin?



Und wie sieht nun das ganze Szenario aus?







6) 📜 Zusammenfassung & 🔭 Ausblick



Petrinetze

- eine Modellierungstechnik
- Visualisierung + mathematische Formalisierung
- erlaubt **präzise Formulierung** von Eigenschaften...
- ...und deren **mathematischer Nachweis**

von
vielen!

oder
Widerle-
gung!

Mehr zu Petrinetzen

- z. B. in Reisig (2010): „Petrinetze“
- am FB entwickeltes Werkzeug: **RENEW**



Takeaway

Informatiker $\neq$ Programmierer, HW-Designer, PC-Doktor, Word-Experte, ...

Informatiker = **Problemlösekünstler!**



Wir sehen uns wieder...



- Grundlagenvorlesungen, Seminare, Abschlussarbeiten, ...
- ...und vielleicht auch irgendwann im Master Informatik!



Zum Schluss ein paar Tipps

- seid engagiert und aktiv
- ein Studium ist ein Vollzeitjob
 - ⇒ Behandelt es so!
- „It's dangerous to go alone!“
 - ⇒ Findet Lerngruppen!



Aber vor allem:
Habt Spaß!

- [1] Wolfgang Reisig. ***Petrinetze: Modellierungstechnik, Analysemethoden, Fallstudien***. 1. Auflage. Leitfäden der Informatik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2010. ISBN: 9783834812902. (Besucht am 11.10.2023).